

変分セクションに関する構造的補足

本モデルは、厳密解ではなく準解 $\phi(r)$ を意図的に採用している。その理由は、厳密解を課すことで特性スケール $r = R$ の物理的意義が消失し、空間のスケール応答的構造という本質的な挙動を再現できなくなるためである。

仮に厳密解を強制すると、 $r = R$ というスケールは座標変換や対称性に基づく縮退によって吸収されてしまう可能性が高い。その場合、 R は物理的に意味を持つスケールとしての地位を失い、冗長なパラメータとなることで、スケール依存の意味ある構造は記述されなくなる。

準解であることは弱点ではなく、本モデルの構造的基盤である。それこそが、スケール依存的な空間力学を実現する鍵である。

この準解の妥当性を検証するために、変分残差解析を実施した。その結果、極値条件の破れは局所的かつ制御されており、物理的に意味のあるものであることが確認された。この挙動は Fig. 1 に視覚的に示されている。

準解の使用を、欠陥や妥協と誤解しないようにしてください。これは欠点ではなく、理論の核であり、本構造の根幹であるからです。

重要なのは、この準解が近似のために採用されたのではなく、有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ を導出するうえでの構造的役割のために導入されたという点である。

なお、このことは、宇宙全体の構造や場の基本方程式そのものが準解であることを意味するものではない。

本研究の目的は、 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ のような準解構造が、その他の部分が厳密解で記述される宇宙において、機能的に作用し得るかを検証することにある。

また、本論文における「対数型」という用語は、厳密な \log 関数式そのものを意味するのではなく、関数の形状が対数的であるという定性的特徴を指している。

正式なバージョンは Zenodo で公開されています。

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19366013>



Repulsive Gravity Theory Based on Scalar Fields and the Effective Λ

Misaki Kasai

2025 年 5 月 30 日

概要

本研究では、スカラー場に起因する空間のスケール応答的な幾何学的斥力効果をもたらす有効 Λ 項 Λ_{eff} を導出することで、Einstein 方程式の枠組みを重力理論から、斥力応答を基盤とした斥力応答型重力理論へと拡張する方法を提示する。 Λ_{eff} の効果は空間スケールに依存し、特に銀河スケールおよびブラックホール内部における重力の構造的性質そのものを再定義する役割を果たす可能性がある。銀河回転曲線の外縁部にみられる平坦化と、ブラックホール特異点の回避という二つの観測的・理論的問題に対して、共通のスカラー場項 Λ_{eff} による統一かつ定量的な解決を提示する。

1 銀河回転曲線問題と特異点問題の概観

近年の観測により、銀河の外縁部における恒星の回転速度が、重力理論（一般相対性理論）と通常のバリオン物質質量から期待される値を大きく上回ることが明らかとなった。これはいわゆる「銀河回転曲線問題」であり、ダークマターの存在を前提としない限り、既存の重力理論では説明が困難であるとされてきた [1, 2]。さらに、ブラックホール内部における重力崩壊は、古典的には $r \rightarrow 0$ 極限で特異点（無限の曲率）を生じることが知られており、これもまた一般相対性理論の構造的限界を示唆していると考えられている [3]。この「特異点問題」は、重力理論において量子補正または構造的修正の必要性を強く示唆する。

2 Λ CDM の成功と限界

現代宇宙論の標準モデルである Λ CDM モデルは、宇宙マイクロ波背景放射（CMB）、バリオン音響振動（BAO）、Ia 型超新星などの観測と高精度に整合する成功を収めている [4]。しかしその一方で、宇宙定数 Λ

は静的・一様な定数として定義されており、空間構造やスケール依存性を含まないという制約をもつ。

また、 Λ CDM はダークマターやダークエネルギーといった「見えない成分」に依存しているが、これらの正体は未解明である。これらは理論的には補助項として振る舞い、物理的実在性の根拠が希薄であるという批判も根強い [5]。

3 動機：主語としての斥力

本研究では、「重力＝引力（空間の歪み）」という視点を基本とする一般相対性理論とは対照的に、斥力応答を主語とする重力理論の構築を試みる。具体的には、スカラー場に由来する有効 Λ 項 Λ_{eff} を導入し、空間スケールに依存する幾何学的斥力として機能することで、銀河スケールからブラックホール特異点スケールまでの重力構造を統一的に説明する枠組みを提案する。

なお、本研究は、Einstein 方程式における宇宙定数 Λ を定数のまま保持する立場を採る。ただし、その効果は、スカラー場 $\phi(r)$ の対数型構造を通じてスケール依存的に現れ、観測可能な重力構造として $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ に反映される。このようにして、 Λ CDM の哲学的背景を保ちつつ、その構造的限界を乗り越える重力理論を構築することを目的とする。

4 スカラー場と有効 Λ 項 Λ_{eff}

このセクションでは、有効 Λ 項

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

が、球対称かつ静的なスカラー場に対して変分原理を適用することで構造的に導出されることを示す。

ここで、 R は空間スケールにおける特性長（characteristic scale）であり、 R および r は観測と突合されるまでは無次元量として扱われる。

初めに、スカラー場に対する標準的なローレンツ不変なラグランジアン密度を考える。すなわち、その一般形は：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

ここで、幾何学的有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ の空間的等方性を保証し、特性スケール R を保持するために、場の構成は球対称かつ静的、すなわち $\phi = \phi(r)$ に制限する。もし異方性を含めた場合、スケール R は座標変換によって吸収され、その物理的意味を失ってしまうためである。したがって、ラグランジアンは次の形をとる：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - V(\phi(r))$$

この定式化は、標準的なラグランジアン構造のローレンツ不変性を破ることを意味するものではない。

ここで、異方性が排除された等方的な幾何学的斥力テンソルは次のように定義される：

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} \equiv \Lambda_{\text{eff}}(r) g_{\mu\nu}$$

この構造を実現する自然なスカラー場として、以下を選択する：

$$\phi(r) = \frac{2r}{R^2 + r^2}$$

このとき、 $\phi(r)$ を用いたポテンシャル $V(\phi(r))$ は以下のように展開される：

$$\begin{aligned} \phi(r)^2 &= \left(\frac{2r}{R^2 + r^2} \right)^2 = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2} \\ V(\phi(r)) &= -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2} \left(4 - \frac{4R^2 r^2}{(R^2 + r^2)^2} \right) \\ &= \underbrace{-\frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}}_{\text{主項}} + \underbrace{\frac{4R^2 r^4}{(R^2 + r^2)^4}}_{\text{第二項 (補正項)}} \end{aligned}$$

ここで、第二項は補正項として主要構造をわずかに変形するが、主項は明確に：

$$V(\phi(r)) \propto -\Lambda_{\text{eff}}(r), \quad \Lambda_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

特に $r \ll R$ では第二項は主項に比べて十分に小さく、また $r \gg R$ においても

$$\underbrace{\frac{r^2}{(R^2 + r^2)^2}}_{\text{主項}} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \underbrace{\frac{r^4}{(R^2 + r^2)^4}}_{\text{第二項 (補正項)}} \sim \frac{1}{r^4}$$

となり、補正項の寄与は急速に減衰する。

さらに、中間スケールにあたる $r = R$ においても、

$$\underbrace{\frac{4R^2}{(2R^2)^2}}_{\text{主項}} = \frac{1}{R^2}, \quad \underbrace{\frac{4R^2 R^4}{(2R^2)^4}}_{\text{第二項 (補正項)}} = \frac{1}{4R^2}$$

より、補正項は主項の $1/4$ にとどまる。

したがって、空間の全領域にわたって主項が支配的であることから、 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ はスカラー場ポテンシャル $V(\phi(r))$ から直接かつ自然に導出されることが示される。

5 スカラー場に対する変分評価

本セクションでは、セクション4で構成した有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ から導かれるスカラー場 $\phi(r)$ のラグランジアンが、変分原理（オイラー＝ラグランジュ方程式）に基づく極値条件を満たすかどうかを評価する。ここで、我々は特に、空間スケール $r = R$ の近傍において極値条件が局所的に破れ始め、その破れが $r \gg R$ の領域で急速に減衰することを期待する。

このような挙動は、採用された $\phi(r)$ の構造から自然に予測されるものであり、特性スケール R が消えずに保持されている確認になると同時に、宇宙の加速膨張が極値条件の局所的な破れと密接に関係している可能性を示唆するためである。

なお、ここで議論される極値条件の破れは、保存則 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ の破れを直接的に意味するものではないことに注意されたい。

セクション4より、スカラー場とそれに対応するポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{2r}{R^2 + r^2}, \quad V(\phi(r)) = -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2)$$

よって、静的・球対称のもとでのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi(r)) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2)$$

したがって、このラグランジアンから導出されるオイラー＝ラグランジュ方程式は以下のように与えられる：

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = R^2 \phi^3 - 2\phi$$

この条件のもとで、極値条件からのずれ（変分残差）は次のように定義される：

$$\delta(r) \equiv \frac{d^2\phi}{dr^2} - (R^2 \phi^3 - 2\phi)$$

これにスカラー場 $\phi(r)$ を代入すると、変分残差は明示的に次の形で与えられる：

$$\delta(r) = \left[\frac{4r(r^2 - 3R^2)}{(R^2 + r^2)^3} \right] - \left[\frac{8R^2 r^3}{(R^2 + r^2)^3} - \frac{4r}{R^2 + r^2} \right]$$

これを整理すると：

$$\delta(r) = \frac{4r(r^4 + r^2 + R^4 - 3R^2)}{(R^2 + r^2)^3}$$

したがって、原点近傍において分子の線形項が消失する特性スケールは $R = \sqrt{3}$ である。この値を用いて、スカラー場 $\phi(r)$ に対する変分残差 $\delta(r)$ を数値的に評価した。その結果得られたプロットを Fig. 1 に示す。

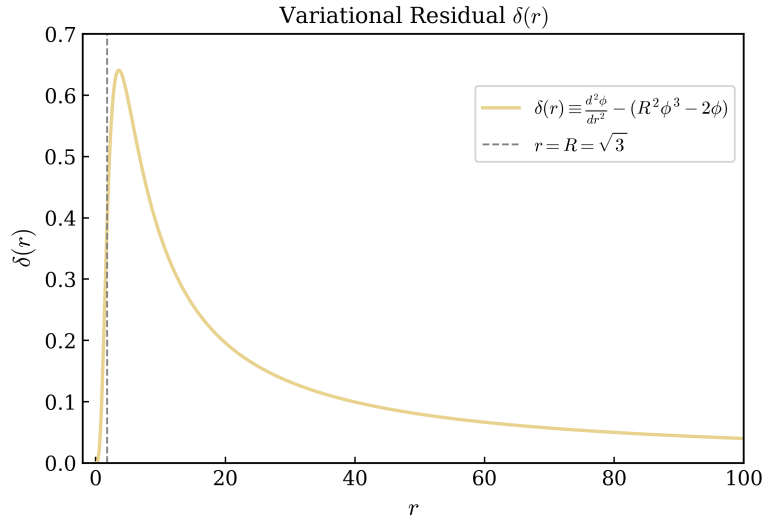


Fig. 1: スカラー場 $\phi(r)$ に対する変分残差 $\delta(r)$

Fig. 1 から、変分残差 $\delta(r)$ は空間スケール $r = R$ において局所的なずれを生じ、その直後 $r > R$ にピークを迎え、以降急速に減衰していく様子が確認される。この結果は、スカラー場が特に $r = R$ を認識し、それに応答していること、また極値条件の破れが局所的かつ非瞬間的であることを示している。このような挙動は、持続的な加速膨張の性質とも整合的である。

解析の範囲は $r \in [0.0001, 100]$ に設定した。この区間内における変分残差 $\delta(r)$ の最大値は以下の通りである：

$$\delta_{\max} \approx 0.641 \quad \text{at} \quad r \approx 3.56$$

この残差の有意性を評価するため、極値条件に対する相対誤差を次のように定義する：

$$\epsilon_{\phi}(r) \equiv \left| \frac{\delta(r)}{\phi(r)} \right|$$

残差が最大となる点 ($r \approx 3.56$) において、スカラー場の値は $\phi(r) \approx 0.454$ である。したがって：

$$\epsilon_{\phi} \approx 1.41$$

同様に、特性スケール $r = R = \sqrt{3}$ における相対誤差は以下の通りである：

$$\epsilon_{\phi}(R) = \left| \frac{\delta(R)}{\phi(R)} \right| \approx 0.667 \quad (\delta(R) \approx 0.385, \phi(R) \approx 0.577)$$

特性スケール $r = R$ 付近において、相対誤差は極値条件の局所的な破れと見なせる範囲に収まっており、このときの値 $\epsilon_{\phi}(R) \approx 0.667$ は、本関数が準解として妥当であることを裏付けている。

一方で、変分残差 $\delta(r)$ は $r \approx 3.56$ 付近で最大値を取り、このとき相対誤差はおよそ $\epsilon_\phi \approx 1.41$ に達する。しかし、このスケールにおいては $\phi(r)$ 自身が減衰して小さくなるため、分母が小さくなることで相対誤差が見かけ上過大評価される。したがって、準解の妥当性を評価するうえでは、主に $r = R$ 付近に注目するのがより適切である。

以上の評価に基づき、本研究で採用されたスカラー場 $\phi(r)$ は、等方性により保証された特性スケール R を吸収してしまうような厳密解の代わりに、 R を保持しながら変分原理に著しく反することのない準解として定式化され、同時に極値条件の局所的破れ $\delta(r)$ は、スカラー場 $\phi(r)$ 励起のための必要条件であることがわかる。

本論文では、準解 $\phi(r)$ から構成された有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ に基づく構造全体を、 Λ_{eff} モデル（または $f\Lambda$ 理論）として以後参照する。

6 観測値 Λ との整合性

導出したスケール依存型の有効 Λ 項

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

は、 $r = R$ において最大値をとり、その値は次のように与えられる：

$$\Lambda_{\text{eff}}^{\text{max}} = \Lambda_{\text{eff}}(r)|_{r=R} = \frac{4R^2}{(R^2 + R^2)^2} = \frac{4R^2}{4R^4} = \frac{1}{R^2}$$

ここで、この最大値を観測されている宇宙定数

$$\Lambda \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

として同定すれば、

$$R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx 10^{26} \text{ m}$$

となり、これは宇宙論スケール $\sim 10^{26} \text{ m}$ と一致する。

したがって、宇宙論スケールの特性スケールとして、 $R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \equiv R_c$ が自然に定義される。

このことは、本研究で導出されたスカラー場由来の有効 Λ 項が、観測的宇宙定数と自然に整合する構造を持つことを意味しており、 Λ_{eff} が宇宙論的斥力の実体として有力な候補であることを示している。

7 拡張 Einstein 方程式

拡張 Einstein 方程式は、以下のとおり記述される：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$$

$r \ll R_c$ となる局所スケール（たとえば太陽系スケール）では、

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$$

となり、従来の Einstein 方程式へ自然に帰結する。

よって、水星の近日点移動や重力赤方偏移といった、Einstein 方程式によって精密に説明されてきた観測事実とも整合する。

また、有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ は次のように書き換えることができる：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{R^2} F(x), \quad F(x) = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \equiv \frac{r}{R}$$

ここで、先ほどの拡張 Einstein 方程式に Bianchi 恒等式を適用すると、幾何学-物質間のエネルギー交換（すなわち局所的な非保存）を表す交換流 J を明示的な形で定義することができる。静的かつ球対称な条件においては、半径方向のみが残るから、

$$J_\nu \equiv \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\text{matter})} = \frac{1}{\kappa} \partial_\nu \Lambda_{\text{eff}}, \quad J_r = \frac{1}{\kappa R^3} \frac{dF}{dx}$$

すなわち、局所的な保存則は破れるが、半径方向および体積全体の流束は

$$\int_0^\infty J_r dr = 0, \quad \Phi(r) = 4\pi r^2 J_r \Rightarrow \Phi(0) = \Phi(\infty) = 0$$

となり、幾何学-物質間のエネルギー交換は空間全体で厳密に釣り合い、大域的なエネルギー保存が保証される。

さらに、局所的な非保存を表す交換流 J_r が無視できるほど小さくなるような宇宙論スケール $r \sim R_c \sim 10^{26}$ m では、

$$\left| \frac{d\Lambda_{\text{eff}}}{dr} \right| \sim 10^{-78} \text{ m}^{-3} \Rightarrow \Lambda_{\text{eff}} \approx \text{const.}$$

となり、Friedmann 方程式が自然に再現される：

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

8 銀河回転曲線への適用

8.1 重力項：現実的線形近似モデル

銀河の中心部においては、バリオン成分が比較的密集しており、球対称かつ一様密度の近似モデルが適用可能である。このとき、半径 r 内に含まれる質量 $M(r)$ は次のように表される：

$$\rho = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

この質量分布により生じる重力ポテンシャルから、回転速度は次のように導かれる：

$$v_{\text{grav}}^2(r) = \frac{GM(r)}{r} = \frac{G}{r} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right) = \frac{4}{3}\pi G \rho r^2, \quad \Rightarrow \quad v_{\text{grav}} \propto r$$

これは、銀河回転曲線の内側（中心近傍）における線形増加傾向と整合する。実際、観測的にも中心付近の回転速度は $v \propto r$ に近い傾向を示しており、このモデルは銀河中心部における重力支配領域の良い近似となる。

8.2 斥力項：回転速度と平坦化

一様密度モデルによる重力項が銀河中心部で支配的である一方、銀河外縁部における平坦な回転曲線を説明するには、それとは異なる力学的寄与が必要である。

本モデルでは、スカラー場 $\phi(r)$ の空間構造から生み出されるスケール依存型の有効 Λ 項が、幾何学的な斥力を及ぼす。この効果は、以下の形式で回転速度に寄与する：

$$v_{\text{rep}}^2(r) = v_0^2 \cdot \frac{2r^2}{R^2 + r^2}$$

ここで、

- v_0 は斥力項に由来する代表的な特性速度スケール（単位：m/s）であり、
- 銀河外縁部（ $r > R$ ）において支配的になる。

観測に基づく代表値として $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ を採用する。この構造は、中心部では寄与が小さく、 $r \rightarrow \infty$ で漸近的に一定値 $v_{\text{rep}} \rightarrow \sqrt{2}v_0$ に収束するため、回転速度の平坦化を自然に再現する。

8.3 エネルギー合成による回転速度

本モデルにおける回転速度の重力的寄与と斥力的寄与は、互いに独立なエネルギー項と見なせる。したがって、観測される回転速度は次のようなエネルギーの二乗和として合成される：

$$v_{\text{total}}^2(r) = v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r) \quad \Rightarrow \quad v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}$$

この合成構造により、

- 中心部では $v_{\text{grav}} \propto r$ が支配し、
- 外縁部では $v_{\text{rep}} \rightarrow \sqrt{2}v_0$ により回転曲線が平坦化される。

すなわち、本構造はダークマターを仮定することなく銀河回転曲線の特徴を再現できることを示しており、 Λ_{eff} の有効性を裏付ける。

8.4 Λ_{eff} の有効エネルギーからの $v_0 \approx 200$ km/s の導出

特性速度スケール $v_0 \approx 200$ km/s は、セクション 6 の結果および Λ CDM モデルにおける真空エネルギー密度式に基づいて導出できる。したがって、幾何学的有効斥力エネルギー密度は次のように与えられる（セクション 6 より、 $r = R_c$ において $\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda$ であるから、）：

$$\rho_{\Lambda_{\text{eff}}}(R_c) = \rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \approx 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

この有効エネルギー密度を、半径 $R \approx 1000$ kpc $\approx 3.1 \times 10^{22}$ m の球対称領域にわたって積分すると、有効質量は以下のように求まる（セクション 6 より、 10^{22} m \ll 10^{26} m であるため、 ρ_{Λ} はこの範囲では一定とみなして積分できるから、）：

$$M_{\Lambda} \approx \rho_{\Lambda} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 10^{42} \text{ kg}$$

この有効質量に対応するエネルギーの一部が運動エネルギーに変換されるとすると、次の関係が得られる：

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}M_{\Lambda}v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 \approx 200 \text{ km/s} \approx \sqrt{\frac{2E_{\text{rot}}}{M_{\Lambda}}}$$

したがって、特性速度スケール $v_0 \approx 200$ km/s は、 Λ_{eff} モデルの枠組みの中で自然に導出される物理量であり、対応するエネルギー $E_{\text{rot}} \approx 2 \times 10^{52}$ J は、観測的に典型的なスケール $E_{\text{obs}} \sim 10^{52}$ J と整合的である。

また、幾何学的な斥力エネルギー全体は $E_{\Lambda} = M_{\Lambda}c^2 \approx 10^{59}$ J と見積もられ、 $E_{\text{rot}} \approx 2 \times 10^{52}$ J はこれと比較して十分に小さく、エネルギー論の一貫性も保たれている。

これらの結果は、スカラー場から導出されたスケール依存項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ が、物理的に妥当な幾何学的斥力項として機能しうることを定量的に裏付けるものである。

8.5 物理的意味：領域ごとの支配構造

- 中心部 ($r < R$) :
重力項 $v_{\text{grav}} \propto r$ が支配的
- 中間領域 ($r \approx R$) :
斥力項 v_{rep} が優勢となり始める
- 外縁部 ($r > R$) :
斥力項が支配的となり、回転速度は漸近的に平坦になる。これは、 Λ_{eff} の対数型構造とスケール依存性を反映している。

使用する代表パラメータとプロット条件

- 万有引力定数： $G = 4.302 \times 10^{-6} \text{ kpc} \cdot (\text{km/s})^2 / M_{\odot}$
- 質量平均密度： $\rho = 10^6 M_{\odot} / \text{kpc}^3$
- 各銀河の特性スケール（代表値）： $R = 5 \text{ kpc}$
- 各銀河の特性速度スケール（代表値）： $v_0 = 200 \text{ km/s}$
- 計算対象の半径範囲： $r = 0.1 \sim 20 \text{ kpc}$

以上の代表値を用い、先に導出した回転速度の合成式：

$$v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}$$

に基づき、銀河スケールでの回転速度プロファイルを数値的にプロットしたものが Fig. 2 である。

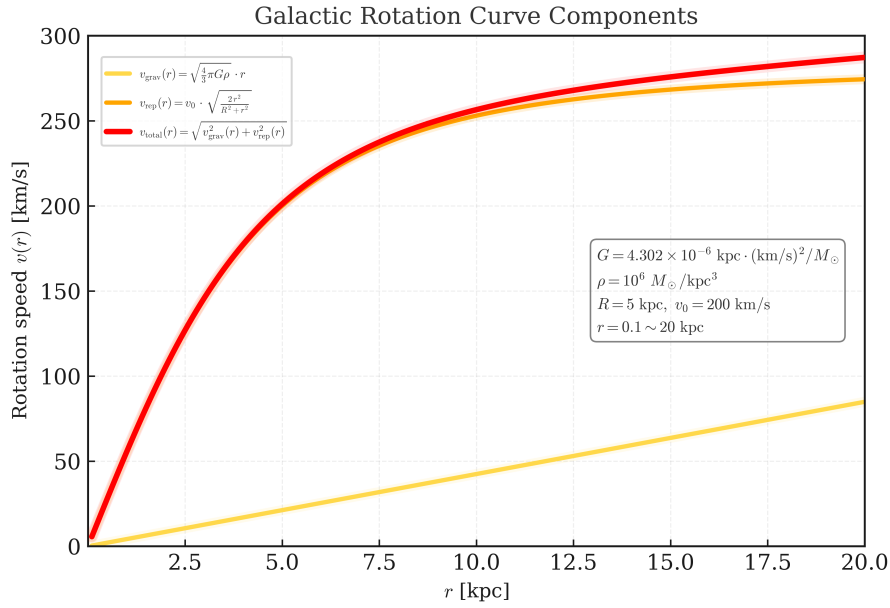


Fig. 2: 銀河回転曲線に対する重力項・斥力項・合成速度の理論モデルに基づく数値プロット。

ところが、Fig. 2 に示す数値シミュレーションの結果から明らかなように、中心部 ($r < R$) において重力項が支配的となることが期待されていたにもかかわらず、全スケールにわたり斥力項が重力項を上回る振る舞いが定量的に確認された。すなわち、銀河内の回転速度は実効的に、スカラー場由来の Λ 項によって支配されていることが明らかとなった。

この結果は、銀河外縁部における回転速度の平坦性のみならず、中心領域においても、銀河の特性スケール $R \sim \text{kpc} \equiv R_g$ によって特徴づけられる斥力項が顕著に寄与していることを示しており、対数型斥力項のスケール支配性が想定を超えて広範囲に及ぶ可能性を強く裏付けるものである。

したがって、銀河回転曲線は、以下の斥力項によって系統的に再現できることがわかる：

$$v_{\text{rep}}(r) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2r^2}{R^2 + r^2}}$$

9 ブラックホール特異点の回避と臨界半径

スカラー場 $\phi(r)$ から導かれる斥力加速度は：

$$a_{\text{rep}}(r) = c_0 \cdot \phi(r) = \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2}$$

ここで、 c_0 は斥力ポテンシャル係数 (単位： m^2/s^2) であり、斥力場における空間的な特性エネルギースケールを表す。なお、この加速度式は、円運動条件 $a = \frac{v^2}{r}$ を通じて、セクション 8.2 で定義された回転速度

式と一意に対応している。

$$a_{\text{rep}}(r) = \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2} \quad \begin{matrix} c_0 = v_0^2 \\ \longleftrightarrow \\ a = \frac{v^2}{r} \end{matrix} \quad v_{\text{rep}}^2(r) = \frac{2v_0^2 r^2}{R^2 + r^2} = v_0^2 \cdot \frac{2r^2}{R^2 + r^2}$$

ブラックホール内部においては、斥力加速度が重力加速度と釣り合うと考えられるため、その釣り合い条件は次式で与えられる：

$$a_{\text{rep}}(r) = g(r) \Rightarrow \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2} = \frac{GM}{r^2}$$

ここで、 M はブラックホールの質量を表す。

$a_{\text{rep}}(r)$ が極大値 $a_{\text{rep}}^{\text{max}}$ をとる点 $r = R = r_{\text{crit}}$ において

$$\frac{c_0}{r_{\text{crit}}} = \frac{GM}{r_{\text{crit}}^2} \Rightarrow c_0 = \frac{GM}{r_{\text{crit}}}$$

また、このとき臨界半径における斥力エネルギーは：

$$E_{\text{rep}} = M \cdot c_0 = \frac{GM^2}{r_{\text{crit}}}$$

一方、ブラックホールの全質量エネルギーは：

$$E_{\text{BH}} = Mc^2$$

ここで、静的・球対称において、空間の斥力応答はブラックホール自身の質量エネルギーに基づくとするれば、この系は閉じた系としてエネルギー保存則が適用でき、ブラックホール内部に蓄積される斥力エネルギーが、ブラックホール全体の質量エネルギーを超えることはない。よって、両者が等しいとにおいて臨界半径を導くと、

$$E_{\text{rep}} = E_{\text{BH}} \Rightarrow \frac{GM^2}{r_{\text{crit}}} = Mc^2 \Rightarrow r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$$

が得られ、これは、シュワルツシルト半径のちょうど半分に一致する：

$$r_{\text{crit}} = \frac{1}{2} r_s, \quad \text{ここで} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

よって、ブラックホールの特性スケール $R = \frac{1}{2} r_s \equiv R_{\text{BH}}$ が自然に定義される。

また、 $M \cdot c_0 = Mc^2$ ($E_{\text{rep}} = E_{\text{BH}}$) より、臨界半径において $c_0 = c^2$ 。したがって、特異点はエネルギー保存則と光速上限により禁止される。

このことから、特異点は外部からのカットオフなしに、理論内部に存在する空間の斥力構造そのものによって自律的に回避されることがわかる。

さらに幾何学的な帰結として、ブラックホールシャドウは、臨界半径 $r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$ によって特徴づけられ、その光子球の半径は：

$$r_{\text{ph}} = \frac{3}{2} r_s = 3 r_{\text{crit}}$$

重力レンズ効果を考慮したシャドウ半径は：

$$b_c = \frac{r_{\text{ph}}}{\sqrt{1 - \frac{2r_{\text{crit}}}{r_{\text{ph}}}}} = 3\sqrt{3} r_{\text{crit}}$$

よって、シャドウの直径は：

$$D = 2b_c = 6\sqrt{3} r_{\text{crit}}$$

したがって、次の無次元比が得られる：

$$\frac{D}{r_{\text{crit}}} = 6\sqrt{3} \approx 10.4$$

この値は正規化なしにあらゆるブラックホールに適用できる普遍的な値であり、イベントホライズンテレスコープ（EHT）による観測値、M87* $d/\theta_g \approx 11.1$ [6] および Sgr A* $d/\theta_g \approx 10.8$ [7] とよく一致する。

また、臨界半径 r_{crit} における斥力加速度を $a_{\text{rep}}^{\text{max}}$ とおけば、臨界半径において $c_0 = c^2$ であるから、

$$a_{\text{rep}}^{\text{max}} = \frac{c^2}{r_{\text{crit}}}$$

ここで、 $r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$ を代入すれば、

$$a_{\text{rep}}^{\text{max}} = \frac{c^2}{\frac{GM}{c^2}} = \frac{c^4}{GM}$$

したがって、ブラックホール内部において、斥力加速度・重力加速度ともに、この値を超えることはない。

ここで、 $a_{\text{rep}}^{\text{max}}$ をプランク加速度

$$a_{\text{P}} \equiv \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}}$$

に等しいとおけば、

$$\frac{c^4}{GM} = \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}} \implies M = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

が得られ、これはプランク質量 $m_{\text{P}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ と一致する。

すなわち、ブラックホールがたとえプランクスケールにまで圧縮されたとしても、その質量はこの基本的限界（プランク質量）を下回ることはできないことがわかる。

10 ヒッグス機構との一致

本セクションでは、セクション 4 で定義された Λ_{eff} モデルのスカラール場ポテンシャル

$$V(\phi(r)) = -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2) = -\phi^2 + \frac{1}{4} R^2 \phi^4$$

が、ヒッグス機構における質量生成構造と直接的に対応していることを示す。

Λ_{eff} モデルのポテンシャル $V(\phi(r))$ から真空期待値 (VEV) を得るために、 ϕ について微分すると、

$$\frac{dV(\phi(r))}{d\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(-2 + R^2 \phi^2) = 0$$

その解は：

$$\phi = 0 \quad \text{または} \quad \phi = \pm \frac{\sqrt{2}}{R}$$

したがって、自明な解 $\phi = 0$ を除外すれば、 Λ_{eff} モデルにおける真空期待値

$$v = \frac{\sqrt{2}}{R}, \quad \phi = \pm v$$

が得られる。観測から定められたヒッグス場の真空期待値 $v \approx 246 \text{ GeV}$ を代入すれば、

$$R = \frac{\sqrt{2}}{v} = \frac{\sqrt{2}}{246 \text{ GeV}} \approx 5.75 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1}$$

自然単位系 ($\hbar = c = 1$) において、 $\text{GeV}^{-1} \approx 1.97 \times 10^{-16} \text{ m}$ であるから、

$$R \approx 5.75 \times 10^{-3} \times 1.97 \times 10^{-16} \text{ m} \approx 1.13 \times 10^{-18} \text{ m}$$

この値は、LHC 実験においてヒッグス粒子が発見された電弱距離スケール $\sim 10^{-18} \text{ m}$ と一致する。よって、

$R = \frac{\sqrt{2}}{v} \equiv R_h$ が自然に定義される。ここで、Yukawa 結合は、

$$y_f = \frac{R_h}{R_f}, \quad R_f \equiv \frac{1}{m_f}$$

と書き換えることができ、両辺に対数を取れば、スケール空間における距離として以下のように記述できる：

$$\log y_f = \Delta\nu, \quad \Delta\nu \equiv \log R_h - \log R_f$$

ここで、標準模型におけるヒッグスポテンシャルは：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad m_h^2 = 2\lambda v^2$$

これらの関係式を明示的に代入すると：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\frac{1}{4}m_h^2\phi^2 + \frac{m_h^2}{8v^2}\phi^4$$

これを細分化すると：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\left(\frac{m_h}{2}\right)^2\phi^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{v}\right)^2\left(\frac{m_h}{2}\right)^2\phi^4$$

ここで、

$$\frac{m_h}{2} \equiv \check{m}$$

とにおいて、前述の関係式 $R_h = \frac{\sqrt{2}}{v}$ を代入すると：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\check{m}^2\phi^2 + \frac{1}{4}R_h^2\check{m}^2\phi^4$$

整理すれば：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = \check{m}^2\left(-\phi^2 + \frac{1}{4}R_h^2\phi^4\right)$$

したがって、質量次元付与と質量無次元化を橋渡しする自然な選択として $\check{m} = 1$ が導かれる。

ここで、自然単位系として $\hbar = c = \check{m} = 1$ を採用し、 $R_h = \frac{\sqrt{2}}{v}$ を一般の特性スケール R に置き換えれば、質量無次元化された普遍的なスカラー場ポテンシャル

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\phi^2 + \frac{1}{4}R^2\phi^4$$

が得られる。これは Λ_{eff} モデルのポテンシャル $V(\phi(r)) = -\phi^2 + \frac{1}{4}R^2\phi^4$ と完全に一致する。

ここで、ヒッグススケールにおける特性質量スケール \check{m} を用いると、自己結合定数は

$$\lambda_{\Lambda_{\text{eff}}} \equiv R_h^2\check{m}^2$$

と表せる。 $\hbar = c = 1$, $\check{m} \neq 1$ を採用すれば、 $R_h \approx 1.13 \times 10^{-18} \text{ m} \approx 5.75 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1}$, $\check{m} = \frac{m_h}{2} \approx 62.5 \text{ GeV}$ であるから、

$$\lambda_{\Lambda_{\text{eff}}} \approx (5.75 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1})^2 \cdot (62.5 \text{ GeV})^2 \approx 0.129$$

が得られる。これは、標準模型におけるヒッグス自己結合定数 $\lambda \approx 0.129$ と一致する。

本セクションにおけるこれらの結果は、質量生成が、幾何学的な斥力応答によって駆動されていることを示している。

ダブルヒッグス (hh) 生成は可能か？

単一のヒッグス粒子 (h) の生成は、特性長さスケール R_h に対応する領域内で、2つの半質量量子状態 $|m_h/2\rangle_{1,2}$ の重ね合せにより起こる：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|m_h/2\rangle_1 + |m_h/2\rangle_2) \Rightarrow |h\rangle$$

この重ね合わせは、次の関係式に反映される：

$$\lambda_{\Lambda_{\text{eff}}} = R_h^2 \left(\frac{m_h}{2} \right)^2$$

これに対して、ダブルヒッグス (hh) の生成は、2つの独立したヒッグス重ね合わせ状態によって表される：

$$|hh\rangle = |h\rangle \otimes |h\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (|m_h/2\rangle_1 + |m_h/2\rangle_2) \otimes (|m_h/2\rangle_3 + |m_h/2\rangle_4)$$

しかし、特性長さスケール $R_h \approx 1.13 \times 10^{-18} \text{ m}$ に対応するエネルギースケールは、 $1/R_h \approx 174 \text{ GeV}$ であるため、総エネルギー $\approx 250 \text{ GeV}$ をもつ4つの半質量を同一の R_h スケール領域内に局在させようとすると、

$$E_{hh} \equiv 4 \cdot \left(\frac{m_h}{2} \right) \approx 250 \text{ GeV} > E_{R_h} \equiv \frac{1}{R_h} \approx 174 \text{ GeV}$$

となり、閉じ込め可能なエネルギースケールの限界を超えることになる。

したがって、半質量の4点重ね合わせ、すなわちダブルヒッグス生成は、 R_h スケールの閉じ込め限界によりエネルギー的に禁止される。

11 考察と結論

本研究では、特性スケール R を保持しながら変分原理とも整合する準解として定式化されたスカラー場 $\phi(r)$ から、スケール依存性を持つ以下の有効 Λ 項を導出した：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

これは以下の三つの側面において有効に機能する：

1. 宇宙論との整合性

有効 Λ 項 Λ_{eff} は $r = R$ において最大値を取り、

$$\Lambda_{\text{eff}}^{\text{max}} = \frac{1}{R^2}$$

となる。これを観測されている宇宙定数 Λ として同定すると、 $R \approx 10^{26}$ m が得られ、これは宇宙論スケール $\sim 10^{26}$ m と一致する。

2. 銀河回転曲線の再現

Λ_{eff} に基づく斥力項を用いた回転速度の合成式

$$v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}, \quad v_{\text{grav}}^2(r) = \frac{4}{3}\pi G\rho r^2, \quad v_{\text{rep}}^2(r) = v_0^2 \cdot \frac{2r^2}{R^2 + r^2}$$

が、現実的な質量平均密度モデルおよび代表的なパラメータを用いた数値評価により、この構造が銀河において観測される平坦な回転速度分布を再現することが示された。また、その結果、銀河全域にわたって Λ_{eff} に基づく幾何学的斥力項が重力項よりも優勢であることが確認された。

したがって、銀河の回転曲線は以下の斥力項によって系統的に特徴づけられる：

$$v_{\text{rep}}(r) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2r^2}{R^2 + r^2}}$$

3. 臨界半径と特異点回避

斥力エネルギーがブラックホールの質量エネルギーに等しくなる条件を導出することで、それ以上の重力崩壊がエネルギー保存則と光速上限のダブルロックにより禁止される臨界半径 $r_{\text{crit}} = \frac{1}{2}r_s$ を得た。この結果は、外部からのカットオフを必要とせず、空間が持つ幾何学的な斥力構造により特異点が必然的に回避されることを示している。

以上の結果から、 Λ_{eff} モデルは、宇宙論的スケールから銀河構造、さらにはブラックホール内部に至るまで、広範な重力現象を一貫して記述可能な、整合的かつ有効な理論的枠組みを提供することが確認された。

本モデルの理論的発展と、観測的・実証的検証は、今後の中心的課題であり続ける。その第一歩として、本スカラーポテンシャル構造の枠組みの中で、ヒッグス機構との一致を確認した。

参考文献

- [1] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *The Astrophysical Journal*, 159:379–403, 1970.
- [2] Y. Sofue and V. Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39:137–174, 2001.
- [3] Roger Penrose. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57–59, 1965.
- [4] Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [5] T. Padmanabhan. Cosmological Constant - The Weight of the Vacuum. *Physics Reports*, 380:235–320, 2003.
- [6] Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L6, 2019.
- [7] Event Horizon Telescope Collaboration. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. IV. Variability, Morphology, and Black Hole Mass. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2):L15, 2022.

付録 A 変分残差構造の宇宙論的写像

本付録では、本理論 (f Λ) における $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ と変分残差構造を宇宙論へ写像する方法をまとめる。

セクション 5 より、 $R = \sqrt{3}$ における変分残差は

$$\delta(r) = \frac{4r^3(r^2 + 1)}{(r^2 + 3)^3}$$

であり、 $r_{\text{peak}} \simeq 3.56$ において最大値 $\delta_{\text{max}} \simeq 0.641$ をとる。なお、セクション 4 で述べた通り、 r および R は無次元量として扱われているため、 r_{peak} も無次元量である。

セクション 7 より $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ の基礎応答関数は

$$F(x) = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \equiv \frac{r}{R}$$

である。ここで、FLRW 時空における物理長 $\ell_{\text{phys}}(t) = a(t)\ell_{\text{com}}$ より $x(t) \equiv \frac{\ell_{\text{phys}}(t)}{R} = \frac{a(t)\ell_{\text{com}}}{R}$ であるから、特性スケール R を基準に $\ell_{\text{com}} = R$ と規格化すれば $x(t) = a(t)$ となる。したがって、宇宙論への最小仮定の写像は

$$x(z) = a(z) = (1+z)^{-1}$$

であり、 $\Xi_{\text{base}}(z) \equiv F(x(z))$ と定義すれば、

$$\Xi_{\text{base}}(z) = \frac{4(1+z)^2}{[(1+z)^2 + 1]^2}$$

を得る。

残差強度が宇宙論的な局所膨張へ反映されると仮定した場合、無次元比 $\frac{r}{r_{\text{peak}}} = \frac{z}{z_c}$ (すなわち $r = r_{\text{peak}} \cdot \frac{z}{z_c}$) より、変分残差 $\delta(r)$ は

$$\delta\left(r_{\text{peak}} \cdot \frac{z}{z_c}\right)$$

と表せる。これを δ_{max} で規格化すると、変分残差に直接比例し、かつ $z = 0$ において $W_\delta(0; z_c) = 0$ 、 $z = z_c$ において $W_\delta(z_c; z_c) = 1$ の両方を満たす規格化窓関数

$$W_\delta(z; z_c) = \frac{\delta\left(r_{\text{peak}} \cdot \frac{z}{z_c}\right)}{\delta_{\text{max}}}$$

が得られる。したがって、有効膨張応答関数は

$$\Xi(z) = \Xi_{\text{base}}(z) [1 + \epsilon W_\delta(z; z_c)]$$

で与えられ、無次元膨張率と膨張率はそれぞれ

$$E^2(z) = \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \Xi(z), \quad H(z) = H_0 E(z)$$

となる。本研究では、平均的に平坦な時空背景を仮定し、その代表値として $\Omega_m (\equiv \Omega_{m0}) = 0.30$, $\Omega_r = 9 \times 10^{-5}$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$, $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ を採用する。また、規格化係数として残差最大値 δ_{\max} を用いる。すなわち、

$$\epsilon = \delta_{\max} \simeq 0.641$$

A.1 有効赤方偏移スケールと H_0 緊張

z_c は有効赤方偏移スケールであり、その値は各時代の宇宙における宇宙マイクロ波背景放射までの距離によって定まると考えるのが自然である。したがって、今日の z_c を求めるには、最終散乱面 $z_* = 1089.9$ までの共動距離の相対差

$$\Delta D_C = \frac{D_C^{\text{f}\Lambda} - D_C^{\Lambda\text{CDM}}}{D_C^{\Lambda\text{CDM}}}$$

が最小になる点を評価すればよいことがわかる。

表1: 最終散乱面までの共動距離の相対差 $\Delta D_C(z_*)$ とその z_c 依存性。計算は $z_* = 1089.9$ に対して行い、 $\Omega_m = 0.30$, $\Omega_r = 9 \times 10^{-5}$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$, $r_{\text{peak}} = 3.56$, $\epsilon = \delta_{\max} = 0.641$ を用いた。

z_c	$\Delta D_C(z_* = 1089.9)$
0.020	+0.762 %
0.050	+0.304 %
0.080	+0.0204 %
0.0820	+0.00515 %
0.0827	-0.000100 %
0.0830	-0.00234 %
0.100	-0.117 %
0.150	-0.349 %
0.200	-0.483 %

この結果から、最終散乱面までの共動距離の相対差は $z_c \simeq 0.0827$ 近傍において符号をまたぎつつ最小化されることがわかる。したがって、今日の宇宙における有効赤方偏移スケールの値は

$$z_c \simeq 0.0827$$

と定まる。

この値を用いたハッブルフロー領域 $0.0233 < z < 0.15$ における本モデルの距離指数

$$\mu_{f\Lambda}(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L^{\Lambda}(z)}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad d_L^{\Lambda}(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E_{f\Lambda}(z')}$$

に対して、 H_0 を可変とした Λ CDM の距離指数 $\mu_{\Lambda\text{CDM}}(z; H_0)$ で再フィット（重みなし最小二乗）したときの最良値を H_0^{app} と定義すると、

$$H_0^{\text{app}} \simeq 73.6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

を得る。これは、初期宇宙における Λ CDM の基準値 $67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ を保持したまま、 $z_c \simeq 0.0827$ 近傍の局所宇宙においてより大きい見かけのハッブル定数が観測されることを意味し、SH0ES [8] による $0.0233 < z < 0.15$ における代表的な観測値 $H_0 \simeq 73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ とも整合的である。

A.2 S_8 緊張

膨張率への残差強度の反映に一貫性を持たせるため、有効重力係数に対しても同じ窓関数 W_δ を用いて残差強度を反映させた

$$\mu(z) = 1 - \eta W_\delta(z; z_c)$$

を定義し、先ほどと同様に規格化係数として $\eta = \delta_{\text{max}} \simeq 0.641$ を適用する。したがって、線形成長方程式は

$$\frac{d^2 D}{da^2} + \frac{3 + \frac{d \ln H}{d \ln a}}{a} \frac{dD}{da} - \frac{3}{2a^2} \mu(z) \Omega_m(a) D = 0, \quad \Omega_m(a) = \frac{\Omega_{m0} a^{-3}}{E(a)^2}, \quad a = (1+z)^{-1}$$

で与えられる。これを数値的に解くと、

$$S_8 = \sigma_8 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{0.3}} \simeq 0.778$$

を得る（初期ゆらぎ振幅は Λ CDM と同一とし、 $\sigma_{8,\Lambda\text{CDM}} = 0.811$ ([4]) を基準値として、 $a = 1$ における成長関数 $D(1)$ の比から σ_8 を評価した。本研究では $\Omega_{m0} = 0.30$ を採用しているため、この場合 $S_8 = \sigma_8$ である）。

この結果は、標準的な Λ CDM の予測よりも小さい構造成長振幅を与えることを意味し、KiDS [9] などの弱重力レンズ観測から得られている $S_8 \simeq 0.77$ の値とも整合的である。

したがって、本理論から導かれる変分残差構造により、宇宙マイクロ波背景放射の幾何を保持しながら、標準宇宙論において指摘されている H_0 緊張と S_8 緊張の同時緩和が以下のように実現される。

$z_c \simeq 0.0827, \quad \epsilon = \eta = \delta_{\text{max}}$		
$H_0^{\text{app}} \simeq 73.6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1},$	$S_8 \simeq 0.778,$	$\Delta D_C(z_* = 1089.9) \approx -0.000100 \%$

最後に、 Λ CDM と比較した本モデルの無次元膨張率 $E(z)$ の振る舞いを Fig. 3 に示す。

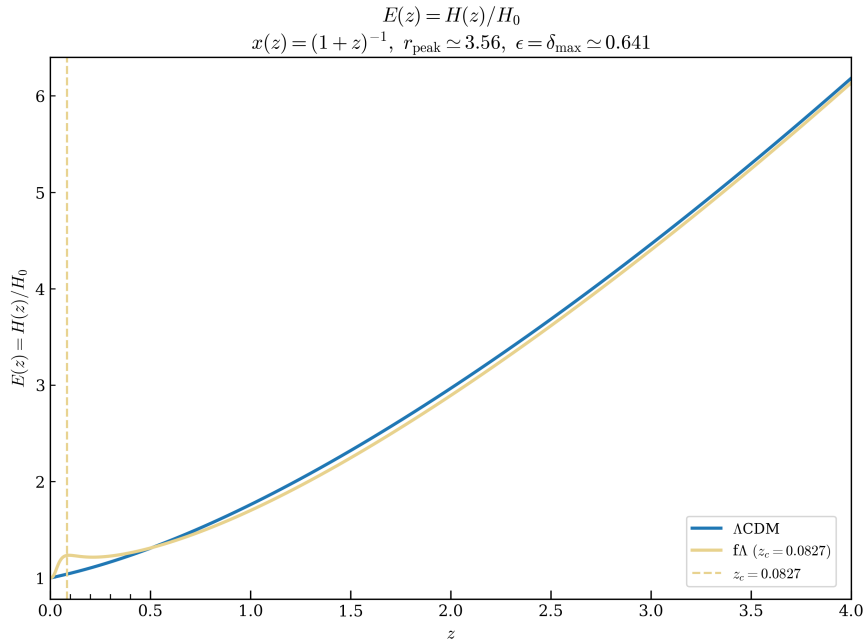


Fig. 3: Λ CDM と比較した無次元膨張率 $E(z)$ の振る舞い

加えて、観測点 ([10], Table I を $\Omega_{m0} = 0.30$ へ簡易補正した値) を重ねた $f\sigma_8(z)$ の比較を Fig. 4 に示す。ここで、 Λ CDM と同様に、成長率 $f(z) \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a}$ より $f\sigma_8(z) = f(z) \sigma_8(z)$ である。

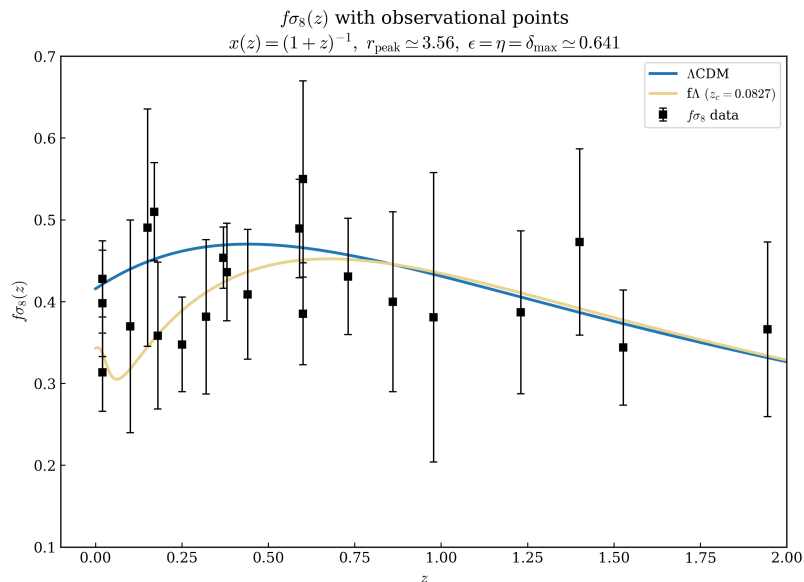


Fig. 4: 観測点を重ねた $f\sigma_8(z)$ の比較。本モデルの $f\sigma_8(z)$ 曲線 (黄色) は、観測されている構造成長データを比較的良く再現していることがわかる。

付録 B 変分残差に対する matter-like な幾何学的抵抗成分と Ω_{m0}

本付録では、変分残差の立ち上がりに対して抵抗しうる臨界的な復元応答を、matter-like な有効幾何学成分として定式化する。

セクション 4 より、スカラー場 $\phi(r)$ は本理論において幾何学応答を特徴づける無次元振幅として扱われる。球対称条件のもとでは、局所的な幾何学応答の規格化振幅は、無次元振幅を半径 r で規格化した $\phi(r)/r$ によって表される。

宇宙論的背景における有効成分としてこの振幅を記述するには、分母の基準長さとして、セクション 6 で定義した宇宙論的長さスケール $R_c = 1/\sqrt{\Lambda}$ を用いる必要がある。すなわち、 $\phi(r)/R_c$ は、宇宙論的背景スケールに対して規格化された局所的幾何学応答の振幅を表し、その強度は $(\phi(r)/R_c)^2$ によって特徴づけられる。この強度を有効密度の形式へ変換するため、重力結合定数 $\kappa = 8\pi G/c^4$ を用いて幾何学的抵抗成分の有効密度を

$$\rho_{\text{geo}}^{\text{resist}}(r) \equiv \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\phi(r)}{R_c} \right)^2$$

と定義する。

ここで、付録 A で述べた通り $x(z) = a(z) = (1+z)^{-1}$ であり、さらに $\ell_{\text{com}} = R$ と正規化しているため、現在すなわち $a = 1$ における関係式 $\ell_{\text{phys}} = a\ell_{\text{com}}$ より、

$$r = \ell_{\text{phys}} = \ell_{\text{com}} = R$$

が成り立つ。したがって、幾何学的抵抗成分の有効密度の現在値は

$$\rho_{\text{geo},0}^{\text{resist}} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\phi(R)}{R_c} \right)^2$$

で与えられる。これを現在の臨界密度 $\rho_{\text{crit},0} = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}$ で正規化すると、

$$\Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}} = \left(\frac{\phi(R)}{R_c} \right)^2 \frac{c^2}{3H_0^2}$$

を得る。ここで、セクション 6 より $\Lambda_{\text{eff}}(R_c) = 1/R_c^2 = \Lambda$ であるから、

$$\Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}} = \phi(R)^2 \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} = \phi(R)^2 \Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0}$$

と簡約化できる。ここで、 $\Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0}$ は、セクション 7 で示した拡張 Einstein 方程式における幾何学項 Λ_{eff} に対応する幾何学的有効密度 $\Lambda_{\text{eff}}/\kappa$ を、現在の臨界密度 $\rho_{\text{crit},0}$ で規格化して得られる宇宙論的成分 $\Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0} \equiv \Lambda_{\text{eff}}(R_c) c^2 / (3H_0^2) = \Lambda c^2 / (3H_0^2)$ を表す。

したがって、幾何学的抵抗成分の現在値は、幾何学応答の強度 $\phi(R)^2$ を重みとしてもつ宇宙論的成分として与えられる。

さらに、変分残差の構造から定まる特性スケール $R = \sqrt{3}$ において $\phi(R)^2 = 1/3$ であるから、

$$\Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}} = \frac{1}{3} \Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0}$$

を得る。すなわち、幾何学的抵抗成分の現在値は、 Λ_{eff} に対応する宇宙論的成分の 1/3 に相当する大きさをもつ。

また、セクション 4 および 7 より Λ_{eff} は真空エネルギーではなく幾何学項として扱われているため、独立の流体圧力を仮定していない。したがって、この成分は非圧の matter-like 有効成分 ($w = 0$) として Ω_{b0} と並列に扱うことができ、その幾何学的有効密度の背景レベルでの赤方偏移依存は標準的に

$$\rho_{\text{geo}}^{\text{resist}}(z) = \rho_{\text{geo},0}^{\text{resist}} (1+z)^3$$

で与えられる。ここで、 $x(z) = a(z) = (1+z)^{-1}$ を用いれば、

$$\rho_{\text{geo}}^{\text{resist}}(z) = \rho_{\text{geo},0}^{\text{resist}} x(z)^{-3}$$

と書き換えることができ、さらに $x(z) = \ell_{\text{phys}}(z)/R$ より

$$x(z)^{-3} = \left(\frac{R}{\ell_{\text{phys}}(z)} \right)^3$$

であるから、幾何学的抵抗成分の matter-like な赤方偏移依存はこの幾何学的スケール比によって記述されることがわかる。すなわち、変分残差の立ち上がり抵抗する matter-like な幾何学的抵抗成分は、現在値において $\Lambda_{\text{eff}}(R)$ と同様に $\phi(R)^2$ によって特徴づけられ、背景宇宙においては、宇宙膨張に伴う $\ell_{\text{phys}}(z)$ の増大とともに、 $x(z)^{-3}$ すなわち $\left(\frac{R}{\ell_{\text{phys}}(z)} \right)^3$ に従って急速に減衰する。したがって、全 matter 成分は、バリオン (通常物質) 成分と幾何学的な matter-like 成分の和として記述でき、また近似的平坦性

$$\Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}} + \Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0} = 1$$

より、

$$\Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0} = \frac{1 - \Omega_{r0} - \Omega_{b0}}{1 + \frac{1}{3}}$$

を得る。ここで、全 matter 成分は

$$\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}}$$

であるから、 $\Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}} = \frac{1}{3} \Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0}$ より

$$\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \frac{1}{3} \frac{1 - \Omega_{r0} - \Omega_{b0}}{1 + \frac{1}{3}} = \Omega_{b0} + \frac{1 - \Omega_{r0} - \Omega_{b0}}{4}$$

となる。したがって、上記に代表値

$$\Omega_{b0} = 0.049, \quad \Omega_{r0} = 9 \times 10^{-5}$$

を代入すると、

$$\Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0} \simeq 0.71318, \quad \Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}} \simeq 0.23773, \quad \Omega_{m0} \simeq 0.28673$$

が定量的に定まる。

この値を用いて Appendix A と同様の手順で評価すると、

$$z_c \simeq 0.08951$$

および

$$H_0^{\text{app}} \simeq 73.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad S_8 \simeq 0.758, \\ \Delta D_C(z_* = 1089.9) \approx +1.91 \times 10^{-6} \%$$

を得る。

以上より、近似的平坦性条件のもとでは、上で定義した幾何学的な matter-like 成分が現実的な宇宙論パラメータを与えることが示され、 $\Omega_{\text{geo},0}^{\text{resist}}$ は、変分極値条件 $\delta = 0$ からのずれを抑える matter-like な復元応答として解釈できることがわかる。すなわち、この復元応答は有限幅をもつ変分残差 $\delta(r)$ の山状構造の立ち上がりの抑制に寄与するが、その現在値は $\Omega_{\Lambda_{\text{eff}},0}$ の 1/3 にとどまるため、復元的抵抗から幾何学的な斥力応答への移行が始まる境界 $r = R$ において支配的になることはできず、さらに $r = R$ を越えるとその抵抗は急速に弱まる。その結果、幾何学的な斥力応答が実効的に解放され、系は山を越えたのち、 $\delta(r) \rightarrow 0$ に漸近する領域 $r \gg R$ へ向かう。

追加参考文献

- [8] A. G. Riess et al. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team. *The Astrophysical Journal Letters*, 934:L7, 2022.
- [9] S.-S. Li et al. KiDS-1000: Cosmology with improved cosmic shear measurements. *Astronomy & Astrophysics*, 679:A133, 2023.
- [10] B. Sagredo, S. Nesseris, and D. Sapone. Internal Robustness of Growth Rate data. *Physical Review D*, 98:083543, 2018, arXiv:1806.10822 [astro-ph.CO].